



AJUSTE LINEAL

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



ÍNDICE



AJUSTE POR MÍNIMOS CUADRADOS

LINEALIZACIÓN DE FUNCIONES

EJEMPLOS DE LINEALIZACIÓN

DESARROLLO MATEMÁTICO

CÁLCULO ANALÍTICO DE m Y c

CÁLCULO DEL ERROR

CÁLCULO GRÁFICO DE m Y c

EJEMPLO

LINEALIZACIÓN

AJUSTE DE LOS PUNTOS EXPERIMENTALES

CÁLCULO DE LA PENDIENTE

CÁLCULO DE R

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



AJUSTE POR MÍNIMOS CUADRADOS



LINEALIZACIÓN DE FUNCIONES

Se trata de transformar funciones:

$$y = f(x)$$

en rectas:

$$Y = mX + c$$

m : pendiente

c : ordenada en el origen

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



AJUSTE POR MÍNIMOS CUADRADOS



EJEMPLOS DE LINEALIZACIÓN

$$y = ax^n \rightarrow \underbrace{\ln y}_Y = \underbrace{\ln a}_c + \underbrace{n}_m \underbrace{\ln x}_X \rightarrow (\ln x_i, \ln y_i) = (X_i, Y_i)$$

$$y = ba^x \rightarrow \underbrace{\ln y}_Y = \underbrace{\ln b}_c + \underbrace{x}_X \underbrace{\ln a}_m \rightarrow (x_i, \ln y_i) = (X_i, Y_i)$$

$$y = ax^2 + b \rightarrow \underbrace{y}_Y = \underbrace{b}_c + \underbrace{x^2}_X \underbrace{a}_m \rightarrow (x_i^2, y_i) = (X_i, Y_i)$$

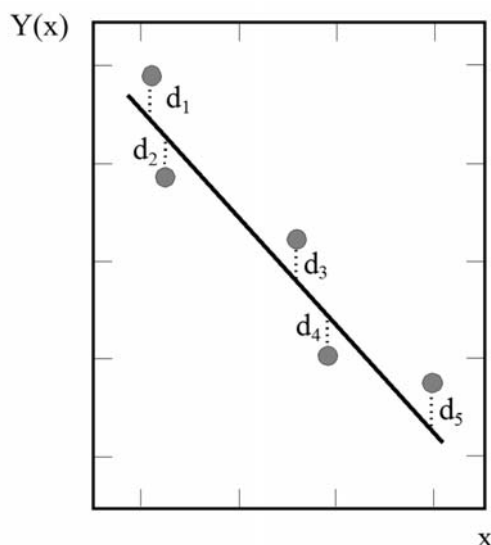
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



AJUSTE POR MÍNIMOS CUADRADOS



DESARROLLO MATEMÁTICO



Minimizar el sumatorio del cuadrado de las n desviaciones d_i

Valor en ordenadas de la recta

$$D = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - Y(x_i)]^2 = \text{mínimo}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



AJUSTE POR MÍNIMOS CUADRADOS



DESARROLLO MATEMÁTICO

Si la función de ajuste es una recta, el desarrollo matemático resulta particularmente simple

$$Y(x) = mx + c \longrightarrow D = \sum_{i=1}^n [y_i - (mx_i + c)]^2 = \text{mínimo}$$

$$\frac{\partial D}{\partial m} = 2 \sum_{i=1}^n [y_i - (mx_i + c)](-x_i) = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial c} = 2 \sum_{i=1}^n [y_i - (mx_i + c)](-1) = 0$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



AJUSTE POR MÍNIMOS CUADRADOS



CÁLCULO ANALÍTICO DE m Y c

Conjunto de puntos

$$(x_i, y_i) \quad [i = 1, \dots, n] \rightarrow Y(X) = mX + c$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad S_2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad S_3 = \sum_{i=1}^n x_i \quad S_4 = \sum_{i=1}^n y_i \quad S_5 = \sum_{i=1}^n y_i^2$$

$$m = \frac{nS_1 - S_3 S_4}{nS_2 - S_3^2} \quad c = \frac{S_2 S_4 - S_1 S_3}{nS_2 - S_3^2}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



AJUSTE POR MÍNIMOS CUADRADOS



CÁLCULO DEL ERROR

$$s_r^2 = \frac{1}{(n-2)} \left[S_5 - \frac{1}{n} S_4^2 - m^2 \left(S_2 - \frac{1}{n} S_3^2 \right) \right]$$

$$\Delta m = \sqrt{\frac{n s_r^2}{nS_2 - S_3^2}}$$

$$\Delta c = \sqrt{\frac{s_r^2 S_2}{nS_2 - S_3^2}}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



AJUSTE POR MÍNIMOS CUADRADOS



CÁLCULO ANALÍTICO DE m Y c

Otro método equivalente que conduce a los mismos resultados y que puede ser utilizado en primera opción para los cálculos es:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad c = \bar{y} - m\bar{x}$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_i}{D}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



AJUSTE POR MÍNIMOS CUADRADOS



CÁLCULO DEL ERROR

$$d_i = y_i - mx_i - c$$

$$\Delta m = \sqrt{\frac{1}{D} \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{(n-2)}} \quad \Delta c = \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{D}\right) \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{(n-2)}}$$

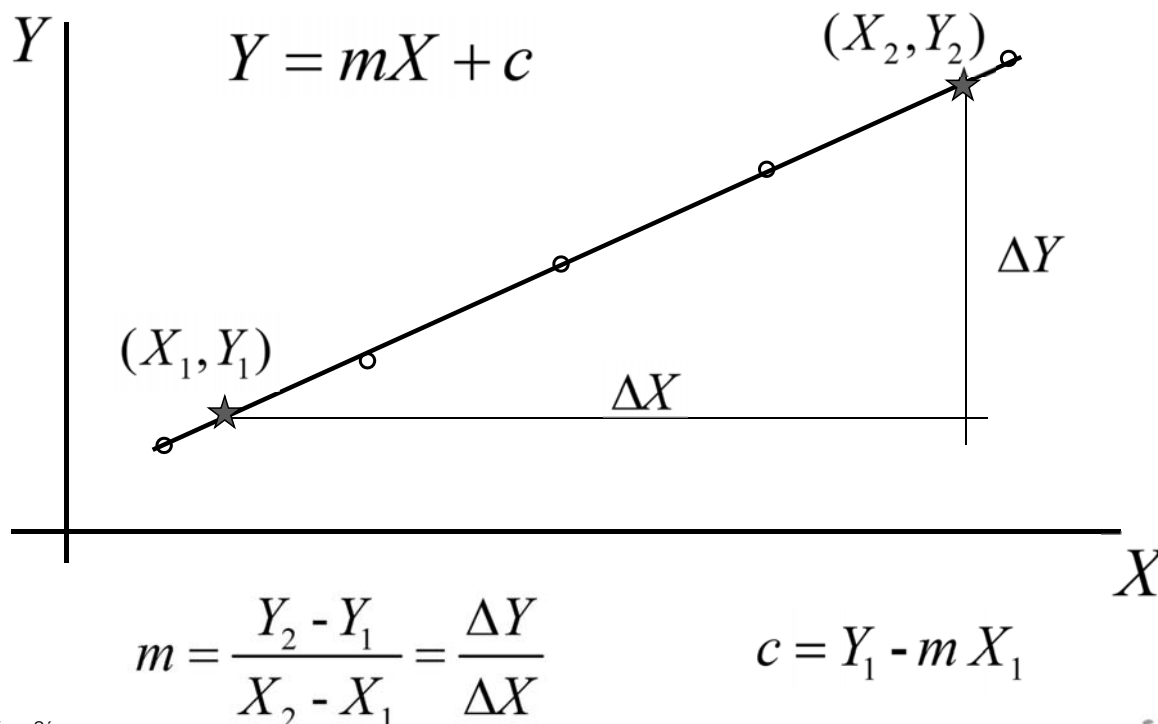
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



AJUSTE POR MÍNIMOS CUADRADOS



CÁLCULO GRÁFICO DE m Y c



J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



EJEMPLO



LINEALIZACIÓN

Los gases perfectos cumplen la ley: $PV = nRT$

Para un sistema con n_1 moles a una temperatura determinada (T_1), la relación entre la presión (P) y la inversa del volumen

($1/V$) es lineal: $P = n_1 R T_1 \frac{1}{V}$

Con el sistema en esas condiciones (n_1 y T_1), si medimos la presión (P_i) para diferentes volúmenes (V_i) obtendremos una serie de puntos ($P_i, 1/V_i$) que, razonablemente, deben estar alineados y nos permitirán calcular R .

Si hacemos una representación gráfica de estos puntos experimentales y los ajustamos a una recta, podremos calcular su pendiente gráfica o analíticamente.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

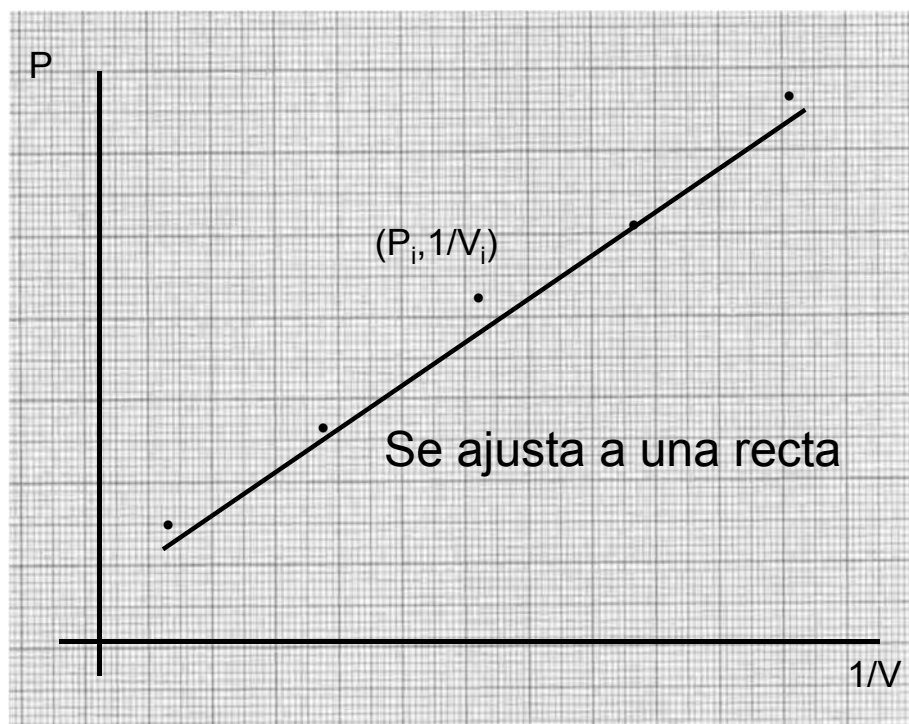


EJEMPLO



AJUSTE DE LOS PUNTOS EXPERIMENTALES

Se representa la presión en función de la inversa del volumen



J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



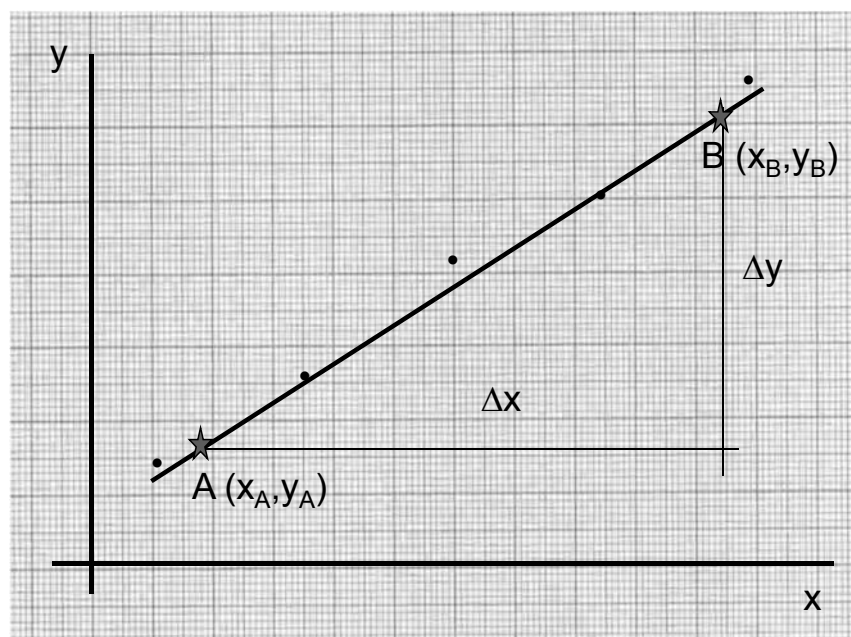
EJEMPLO



CÁLCULO DE LA PENDIENTE

Se calcula la pendiente de la recta obtenida

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



Y, caso de existir, la ordenada en el origen; en este ejemplo debe salir cero aproximadamente

$$c = y_B - mx_B = y_A - mx_A$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física I
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval



EJEMPLO

CÁLCULO DE R

$$P = \underbrace{n_1 R T_1}_{\text{DEL VALOR CALCULADO PARA } m \text{ SE OBTIENE } R} \frac{1}{V}$$

DEL VALOR CALCULADO
PARA m SE OBTIENE R

$$m = n_1 R T_1$$

