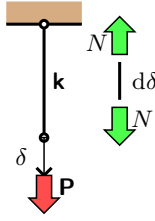


## Sólido deformable (II)

### Energía potencial

Si no fuera por el cable, el peso  $\mathbf{P}$  caería, perdiendo *energía potencial*, es decir, capacidad de suministrar *energía útil*. El cable impide esa pérdida, pero no totalmente.



Por un lado, el peso desciende  $\delta$  y su energía potencial disminuye en  $\mathbf{P}\cdot\delta$ . Parte de esa energía se emplea en deformar el cable y se almacena en su volumen en forma de *energía de deformación*: resulta del trabajo de desplazar una fuerza,  $N$ , a lo largo de pequeñas distancias,  $d\delta$ . Para un cable en el estado proporcional ( $N = \mathbf{k}\delta$ ):

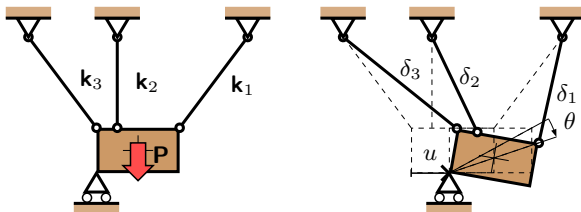
$$\int_0^\delta N \cdot d\delta = \mathbf{k} \int_0^\delta \delta \cdot d\delta = \mathbf{k} \cdot \frac{\delta^2}{2}$$

La energía potencial *total* será  $E = E_0 - \mathbf{P}\delta + \mathbf{k}\delta^2/2$ . La ley de la entropía asegura que la posición de equilibrio será aquella en la que la energía potencial (la energía útil) sea mínima:

$$\frac{dE}{d\delta} = \frac{d}{d\delta} \left( E_0 - \mathbf{P}\delta + \mathbf{k}\frac{\delta^2}{2} \right) = 0 \quad \text{es decir} \quad \delta = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{k}}$$

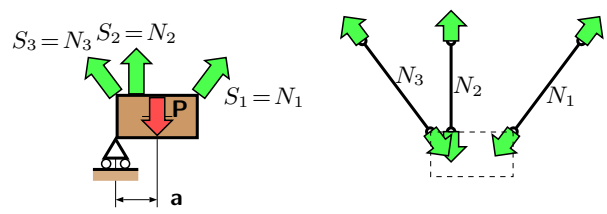
un resultado ya conocido. Las condiciones de equilibrio pueden deducirse alternativamente de la variación nula de la energía alrededor de la posición de equilibrio,  $dE(\delta) = 0$ . Para un cable, resulta  $\mathbf{P}d\delta = \mathbf{k}\delta d\delta$ , o bien,  $\mathbf{P}d\delta = N d\delta$ . El alargamiento infinitesimal  $d\delta$  se denomina *desplazamiento virtual*, y a los trabajos realizados por  $\mathbf{P}$  y  $N$ , *trabajos virtuales exterior e interior*, respectivamente. Este resultado puede generalizarse, dando lugar al **teorema de los trabajos virtuales**: *en el equilibrio, el trabajo virtual de las fuerzas exteriores será igual al trabajo virtual de las fuerzas interiores, para cualquier deformación virtual que se considere.*

### Compatibilidad y equilibrio



El número de grados de libertad,  $g$ , de una estructura se fija a la vista de su sustentación y de sus partes deformables, modeladas mediante  $s$  deformaciones. La posición de equilibrio estará definida por valores para las deformaciones (en el ejemplo,  $[\mathbf{b}^T] = [\delta_1, \delta_2, \delta_3]$ ) y para los grados ( $[\mathbf{g}^T] = [u, \theta]$ ), estando relacionados unos con otros mediante *ecuaciones de compatibilidad* que, bajo la *hipótesis de desplazamientos pequeños*, son lineales:

$$b_j = \sum_i B_{ji} g_i \quad (j = 1, \dots, s) \quad \text{o bien} \quad [\mathbf{b}] \approx [\mathbf{B}] \cdot [\mathbf{g}]$$



Cada hipótesis de carga de la estructura especificará una acción neta  $a_i$  en la dirección de cada grado de libertad  $g_i$  ( $[\mathbf{a}^T] = [0, \mathbf{P}\mathbf{a}]$ ). A cada deformación  $\delta_j$  de los sólidos deformables le corresponderá una sollicitación  $s_j$  ( $[\mathbf{s}^T] = [N_1, N_2, N_3]$ ). La condición de equilibrio puede expresarse, entonces, mediante la igualdad de los trabajos virtuales exterior e interior:

$$[\mathbf{d}\mathbf{g}^T] \cdot [\mathbf{a}] = [\mathbf{d}\mathbf{b}^T] \cdot [\mathbf{s}]$$

La deformación virtual especificada por  $[\mathbf{d}\mathbf{g}]$  cumple, como cualquier otra, con las ecuaciones de compatibilidad ( $[\mathbf{d}\mathbf{b}^T] \approx [\mathbf{d}\mathbf{g}^T][\mathbf{B}^T]$ ) y en consecuencia:

$$[\mathbf{d}\mathbf{g}^T] \cdot [\mathbf{a}] \approx [\mathbf{d}\mathbf{g}^T][\mathbf{B}^T] \cdot [\mathbf{s}] \quad \text{es decir,} \quad [\mathbf{a}] \approx [\mathbf{B}^T] \cdot [\mathbf{s}]$$

Las ecuaciones cartesianas resultantes son las clásicas ecuaciones de la estática y *hay tantas como grados de libertad*. Además, bajo la hipótesis de desplazamientos pequeños, las ecuaciones de compatibilidad y las de equilibrio están regidas por *el mismo juego de coeficientes*,  $[\mathbf{B}]$ . **La consecuencia práctica es que una vez se conocen unas, se tienen ya las otras.**

### Método universal de análisis

Según sea el número  $s$  de sollicitaciones (o *deformaciones*) respecto al de grados de libertad,  $g$ , se tienen tres casos: a)  $s < g$ , **hipostatismo**: en general, no puede haber equilibrio sin grandes deformaciones (estructuras funiculares, ecuaciones sin solución); b)  $s = g$ , **isostatismo**: puede haber equilibrio, las sollicitaciones pueden determinarse sin más información (solución única); c)  $s > g$ , **hiperestatismo**: puede haber equilibrio, pero las sollicitaciones *no* pueden determinarse sin información adicional (infinitas soluciones).

Tanto en el caso b) como en el c), pueden adoptarse como *incógnitas* los grados de libertad, igualando entonces el número de incógnitas al de ecuaciones y resultando un conjunto con solución única (si existe): basta con considerar modelos de deformación (como el modelo 'cable':  $s_j = \mathbf{k}_j \delta_j$ ) y las ecuaciones de compatibilidad. Para una estructura de cables *en el estado proporcional*:

$$s_j = \mathbf{k}_j \delta_j \quad (j = 1, \dots, s) \quad \text{o bien} \quad [\mathbf{s}] = [\mathbf{K}_u] \cdot [\mathbf{b}]$$

$$[\mathbf{a}] \approx [\mathbf{B}^T][\mathbf{K}_u][\mathbf{b}] \approx [\mathbf{B}^T][\mathbf{K}_u][\mathbf{B}] \cdot [\mathbf{g}] \approx [\mathbf{K}] \cdot [\mathbf{g}]$$

y el conjunto de  $g$  ecuaciones *contiene* igual número de incógnitas.

La matriz  $[\mathbf{K}] = [\mathbf{B}^T][\mathbf{K}_u][\mathbf{B}]$  recibe el nombre de *rigidez de la estructura* por jugar, *entre acciones y grados de libertad*, el mismo papel que el módulo de Young,  $\mathbf{E}$ , juega *entre tensiones y deformaciones* de un material, o la rigidez de cable,  $\mathbf{k}$ , *entre tracciones y alargamientos*. Pero se trata de una matriz, no de un escalar: relaciona entre sí los *espacios vectoriales* de las acciones y de los grados de libertad. *Y la relación es lineal*.

La solución del conjunto de ecuaciones se expresa mediante la inversa de la matriz de rigidez, *la matriz de flexibilidad*; y una vez determinado el valor de los grados de libertad (deformación de la estructura), queda determinada la deformación o la sollicitación de sus partes deformables (cables):

$${}^{g \times 1}[\mathbf{g}] \approx {}^{g \times g}[\mathbf{K}^{-1}] \cdot {}^{g \times 1}[\mathbf{a}] \quad \text{y} \quad {}^{s \times 1}[\mathbf{s}] \approx {}^{s \times s}[\mathbf{K}_u][\mathbf{B}] \cdot {}^{g \times 1}[\mathbf{g}]$$

La solución obtenida tiene que cumplir con los supuestos de partida: **desplazamientos pequeños** y **proporcionalidad entre tensiones y deformaciones**.

### Hasta el ‘límite elástico’...

Si se incrementan proporcionalmente las acciones, la estructura alcanzará su límite elástico cuando éste se alcance en el punto que más cerca estaba de él bajo las acciones  $[\mathbf{a}]$ . Denominando  $\lambda_e$  al mínimo cociente  $(\sigma_e/\sigma)_j$  bajo  $[\mathbf{a}]$ , las acciones  $\lambda_e[\mathbf{a}]$  son el ‘límite elástico’ de la estructura, pues la tensión en  $j$  alcanzará ahora su límite elástico. Para acciones *por encima* de  $\lambda_e[\mathbf{a}]$ , las ecuaciones dejan de ser válidas al entrar en estado plástico uno o más puntos de la estructura, *perdiéndose la proporcionalidad entre causas y efectos*.

### ... y más allá.

Conforme algunas partes de la estructura ‘plastifican’, la estructura pierde rigidez. Las partes ‘plastificadas’ aportan una sollicitación *constante y conocida* —en cables,  $(\sigma_u \mathbf{A})_j$ —, incluso si aumenta su deformación. La estructura seguirá siendo capaz de soportar carga adicional mientras al menos  $g$  deformaciones permanezcan por debajo del límite elástico (*isostatismo*). Pero en cuanto el número de esas deformaciones sea *menor* que  $g$  (*hipostatismo*), la estructura comenzará a moverse sin oponer resistencia y sin necesidad de que la carga aumente: la estructura entra en *su propio* estado plástico. Se ha alcanzado la *carga última* de la estructura,  $\lambda_u[\mathbf{a}]$ .

El movimiento de rotura, a carga constante, se caracteriza por, como mucho,  $g-1$  deformaciones *constantes*, correspondientes a partes deformables que *no* han alcanzado el límite elástico. Denotando con el subíndice ‘k’ esas deformaciones en estado proporcional, y con ‘p’ aquellas otras en estado plástico, durante el colapso:

$${}^{s_k \times 1}[\mathbf{db}_k] = [\mathbf{0}] \approx {}^{s_k \times 1}[\mathbf{B}_k] \cdot {}^{s_k \times g}[\mathbf{dg}] \quad {}^{s_p \times 1}[\mathbf{db}_p] \approx {}^{s_p \times g}[\mathbf{B}_p] \cdot {}^{g \times 1}[\mathbf{dg}]$$

en donde  $s_k \leq g-1$  y  $s_p = s - s_k$ .

Eligiendo arbitrariamente un grado, por ejemplo  $g_i$ , y resolviendo el conjunto de las  $s_k$  ecuaciones, es posible describir el movimiento de colapso en función de

$g_i$ , en la forma  ${}^{g \times 1}[\mathbf{dg}] = {}^{g \times 1}[\mathbf{C}] \cdot dg_i$ . Al aplicar el teorema de los trabajos virtuales para estos desplazamientos ‘de colapso’, sólo hay que tener en cuenta las sollicitaciones de la parte ‘plastificada’ —son conocidas,  $(\sigma_u \mathbf{A})_j$ —, pues el resto, aunque con sollicitaciones no nulas (desconocidas), no aumenta su deformación y no desarrolla trabajo:

$${}^{1 \times g}[\mathbf{dg}^T] \cdot \lambda_u [\mathbf{a}] \approx {}^{1 \times s_p}[\mathbf{db}_p^T] \cdot [s_p] \approx {}^{1 \times g}[\mathbf{dg}^T][\mathbf{B}_p^T] \cdot [s_p]$$

$$dg_i [{}^{1 \times g}[\mathbf{C}^T] \cdot \lambda_u [\mathbf{a}]] \approx dg_i [{}^{1 \times g}[\mathbf{C}^T][\mathbf{B}_p^T] \cdot [s_p]]$$

De la ecuación escalar resultante se determina  $\lambda_u$  ( $dg_i$  se cancela en ambos miembros).  $\lambda_u$  es el coeficiente de seguridad *útil* respecto a las acciones  $[\mathbf{a}]$ , y *no debe ser menor* que el coeficiente de seguridad  $\gamma$  exigido por el requisito de resistencia. Las  $s_k$  sollicitaciones desconocidas se determinan con las ecuaciones de equilibrio:

$$\lambda_u [\mathbf{a}] - [\mathbf{B}_p^T] \cdot [s_p] \approx [\mathbf{B}_k^T] \cdot [s_k]$$

Como, en general, no se conoce *a priori* qué elementos plastificarán, es necesario probar distintos *mecanismos de colapso*, eligiendo para cada uno, como mucho  $g-1$  deformaciones en estado proporcional, cuyas deformaciones virtuales serán nulas. El mecanismo que conduzca a un menor valor de la carga de rotura (menor  $\lambda_u$ ) es el que, al aumentar la carga, se producirá primero. Los valores de tensión, relativa al límite elástico, bajo la carga de servicio  $[\mathbf{a}]$  suelen indicar los sólidos que ‘plastificarán’ primero.

Con las  $s_k$  deformaciones ‘proporcionales’, junto a las deformaciones elásticas de los puntos que llegan a su límite elástico justo al alcanzarse la carga última, se tienen  $g$  deformaciones que determinan, mediante  $g$  ecuaciones de compatibilidad, tanto el valor de los grados de libertad como el resto de las deformaciones en el momento de comenzar el colapso. Estas deformaciones aumentan según la cinemática del mecanismo de colapso, y la estructura se rompe en trozos al alcanzarse en algún punto su deformación unitaria de rotura. La distancia entre el comienzo y el final del colapso resulta una buena medida de su *ductilidad*.

