

3. DINÁMICA DE FLUIDOS VISCOSOS

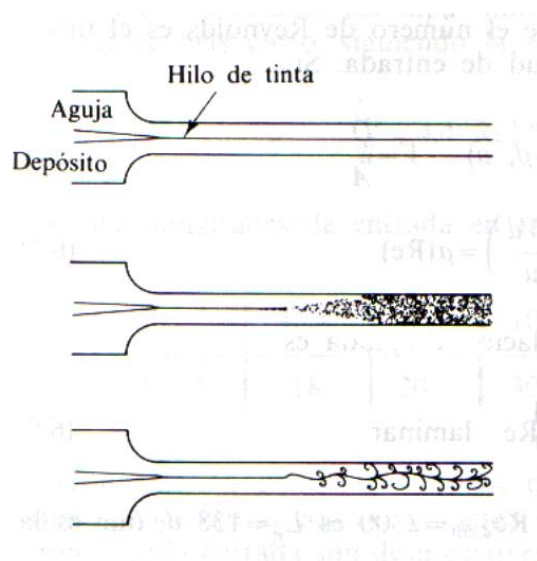
3.1. INTRODUCCIÓN

En los fluidos estudiados con anterioridad, la tensión en un punto interior del medio continuo se supone normal al elemento de superficie que lo contiene, ello conlleva la inexistencia de fuerzas tangenciales entre las distintas capas del fluido en movimiento y por tanto la falta de resistencia al deslizamiento de unas capas sobre otras. Tal propiedad no se cumple estrictamente en el movimiento de los fluidos reales pues dichos fluidos están dotados de viscosidad, causa de la aparición de fuerzas resistentes en la dirección del movimiento.

Dependiendo de la importancia de las fuerzas viscosas, el régimen de movimiento de un fluido puede ser de dos tipos:

- **Régimen laminar o de Poiseuille:** el régimen del flujo es laminar cuando el flujo tiene un movimiento ordenado, en el que las partículas del fluido se mueven en líneas paralelas, sin que se produzca mezcla de materia entre las distintas capas. Este régimen es válido para velocidades pequeñas.
- **Régimen turbulento o de Venturi:** el régimen de movimiento de un fluido es turbulento cuando el fluido presenta un movimiento desordenado con mezcla intensiva entre las distintas capas. Este régimen aparece para grandes velocidades.

La frontera entre ambos tipos de movimiento está condicionada por múltiples factores. Sin embargo, Osborne Reynolds en 1883, profesor de ingeniería británico demostró que el cambio de flujo laminar a flujo turbulento en una tubería dependía del parámetro $\frac{\rho \bar{v} D}{\mu}$, ahora denominado número de Reynolds en su honor. Introduciendo un hilo de tinta en el flujo Reynolds observó la transición y la turbulencia. Sus esquemas sobre el comportamiento del flujo se muestran en las siguientes figuras:



Experimento de Reynolds: a la entrada de una tubería se inyecta una tinta que tiene una densidad igual a la del agua. Cuando la válvula de salida está ligeramente abierta, la tinta se moverá a través del tubo de vidrio de forma intacta formando un filamento. Sin embargo, a medida que se abre la válvula se alcanza una condición en la cual la tinta asume un movimiento fluctuante a medida que avanza en la tubería.

Como ya se ha indicado, el número de Reynolds es el parámetro adimensional definido en la forma:

$$\text{Re} = \frac{\rho \bar{v} D}{\mu} = \frac{\bar{v} D}{\nu}$$

siendo \bar{v} la velocidad media característica del flujo y D es una longitud característica llamado parámetro de distancia y que en el caso de flujos en tuberías es el diámetro de la misma (se utilizan o definen diferentes clases de números de Reynolds cuya principal diferencia es el parámetro de distancia). Hasta ahora todos los experimentos indican que en tubos y por debajo de 2300 solamente puede existir flujo laminar. Una vez que se ha alcanzado 2300 puede existir una transición al régimen turbulento según la magnitud de las perturbaciones locales. Este valor del número de Reynolds se conoce como número de Reynolds crítico. Por debajo del número de Reynolds crítico la cantidad de amortiguamiento existente es suficiente para eliminar los efectos de cualquier perturbación local, de manera que el flujo es siempre bien ordenado.

La teoría del flujo laminar está bien desarrollada y se conocen muchas soluciones, pero no hay análisis ni siquiera soluciones que puedan simular las fluctuaciones aleatorias de escala pequeña del flujo turbulento.

3.2. CONCEPTO DE VISCOSIDAD. FLUIDOS NEWTONIANOS Y NO NEWTONIANOS.

Todo fluido real posee la propiedad de la viscosidad. La viscosidad es la causa de la resistencia que aparece en el flujo de un fluido en tuberías y canales. Las capas de fluido más próximas a la pared (más lentas) frenan a las capas más interiores (más rápidas), por lo que aparece una distribución de velocidades. En el caso en el que el movimiento de un fluido tiene lugar de forma bien ordenada, moviéndose éste en régimen laminar en el que las fuerzas de rozamiento son tangentes a la dirección del movimiento, dependiendo de la expresión matemática que relaciona la tasa de cambio de la velocidad con las fuerzas cortantes o tangenciales se habla de *fluidos newtonianos* y *no newtonianos*.

a) Fluidos Newtonianos

Si representamos por $\frac{\partial v}{\partial n}$ la rapidez con que varía la velocidad en la dirección perpendicular a la superficie, en este tipo de fluidos existe una relación de proporcionalidad entre esta tasa de cambio y la tensión cortante (de rozamiento) entre las capas de fluidos:

$$\tau = -\frac{dF_{roz}}{dS} = -\mu \frac{\partial v}{\partial n}$$

El signo menos indica que estas fuerzas cortantes se oponen al movimiento del fluido. Esta ley se conoce como ley de Newton y establece una dependencia lineal entre las fuerzas de rozamiento y el perfil de velocidades. Como hemos dicho, $\frac{\partial v}{\partial n}$ es la derivada que caracteriza la variación de la velocidad en la dirección transversal al movimiento y la constante de proporcionalidad μ es la **viscosidad dinámica** o coeficiente de viscosidad dinámica que depende de las propiedades del fluido, indicando los signos negativos que se trata de una fuerza de rozamiento que se opone al movimiento. Las unidades de viscosidad dinámica en el sistema internacional son $N \cdot s \cdot m^{-2}$. La viscosidad dinámica depende mucho de la temperatura y poco de la presión. Cuando la temperatura aumenta la cohesión entre las moléculas disminuye, al aumentar la energía cinética de las mismas. Esto da como consecuencia una disminución de la viscosidad. Si se divide μ por ρ se obtienen lo que se conoce como **viscosidad cinemática** (ν). En el sistema cegesimal la unidad de μ es el poise ($dina \cdot s \cdot cm^{-2}$) y la de ν el stokes ($s^{-1} \cdot cm^2$).

La ley de Newton que en principio fue propuesta como hipótesis para una aproximación está ampliamente comprobada experimentalmente para un amplio número de fluidos. Fluidos como el agua, el aire, los productos petrolíferos típicoscumplen esta ley de Newton.

La viscosidad se ve afectada por las condiciones ambientales, especialmente por la temperatura y la presión. En un líquido la viscosidad no dependen en gran medida de la presión pero si disminuye con un aumento de la temperatura, mientras que en un gas ocurre lo contrario. La explicación de estas tendencias es la siguiente: en un líquido las moléculas tienen una movilidad limitada con fuerzas cohesivas grandes presentes entre las moléculas. Un aumento en la temperatura disminuye la cohesión entre las moléculas y existe un decrecimiento de la “pegajosidad” del fluido, es decir, un descenso de la viscosidad. En un gas las moléculas tienen una gran movilidad e interactúan chocando unas con otras durante sus movimientos rápidos. La propiedad de la viscosidad en los gases resulta de estos choques. El número de choques aumenta con la temperatura, de manera que la viscosidad aumenta con la temperatura.

La variación de la viscosidad de los gases con la temperatura puede aproximarse por alguna de las siguientes dos leyes conocidas, respectivamente como la ley de Sutherland y la ley de potencia:

$$\mu = \frac{\mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} (T_0 + S)}{T + S} \quad \text{Ley de Sutherland}$$

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^n \quad \text{Ley de Potencia}$$

donde μ_0 es una viscosidad conocida a una temperatura absoluta T_0 y donde S y N son constantes determinadas mediante el ajuste de una curva de datos experimentales.

Para determinar la viscosidad de los líquidos se utiliza la siguiente fórmula simple:

$$\mu = Ae^{-BT}$$

donde A y B son constantes encontradas nuevamente al ajustar datos a una curva experimental para un líquido particular.

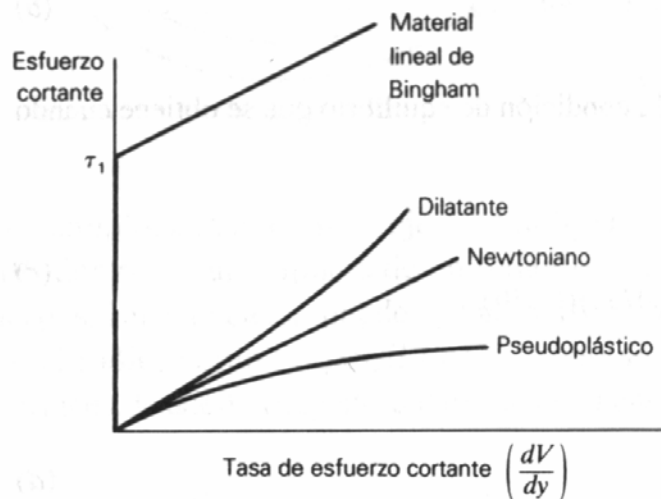
b) Fluidos no Newtonianos

Aunque la mayor parte de los gases y líquidos simples se comportan como fluidos newtonianos, fluidos como pastas (pinturas al aceite), lodos y polímeros de alta densidad son ejemplos de fluidos que no tienen un comportamiento newtoniano. Denominaremos fluidos no newtonianos o anómalos a aquellos fluidos que no siguen la ley de Newton. Digamos que en los fluidos no newtonianos son materiales viscosos en los cuales el esfuerzo cortante está relacionado con la tasa de corte $\frac{\partial v}{\partial n}$ en una forma más complicada. La ley de potencia es una forma de describir el comportamiento de los materiales viscosos. Para flujos paralelos está dada como:

$$\tau = K \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)^n$$

para un fluido newtoniano $K = \mu$ y $n = 1$. Para otros valores de n se tendría un fluido no newtoniano.

El comportamiento de los fluidos no newtonianos se representa mediante las **curvas de corrientes, curvas reológicas** (reología es la rama de la Física que estudia la respuesta de los fluidos a las fuerzas) o **reogramas** y puede ser muy diverso. Un fluido newtoniano cuyo comportamiento se describe mediante la ley anterior con $n < 1$ se conoce como pseudoplástico que disminuye su resistencia al aumentar el esfuerzo. En la siguiente figura se muestra la curva esfuerzo-tasa de corte:



Por otra parte si $n > 1$ el fluido se conoce como dilatante como las pinturas. Además existen los llamados materiales lineales de Bingham que requieren un esfuerzo finito antes de que fluya, cuando el comienza a fluir presenta un comportamiento viscoso newtoniano.

En la tabla siguiente presenta una lista de la viscosidad de ocho fluidos a presión y temperatura estándar. Hay una variación de seis órdenes de magnitud del hidrógeno a la glicerina. Por ello habrá grandes diferencias en el comportamiento de fluidos sometidos a los mismos esfuerzos:

VISCOSIDAD Y VISCOSIDAD CINEMATICA DE OCHO FLUIDOS A 1 atm y 20° C

Fluido	μ , kg/(m·s)†	Relación $\mu/\mu(\text{H}_2)$	ρ , kg/m ³	ν , m ² /s†	Relación $\nu/\nu(\text{Hg})$
1. Hidrógeno	$8,9 \times 10^{-6}$	1,0	0,084	$1,06 \times 10^{-4}$	910
2. Aire	$1,8 \times 10^{-5}$	2,1	1,20	$1,51 \times 10^{-5}$	130
3. Gasolina	$2,9 \times 10^{-4}$	33	680	$4,27 \times 10^{-7}$	3,7
4. Agua	$1,0 \times 10^{-3}$	114	999	$1,01 \times 10^{-6}$	8,7
5. Alcohol etílico	$1,2 \times 10^{-3}$	135	789	$1,51 \times 10^{-6}$	13
6. Mercurio	$1,5 \times 10^{-3}$	170	13 540	$1,16 \times 10^{-7}$	1,0
7. Aceite SAE 30	0,26	29 700	933	$2,79 \times 10^{-4}$	2 430
8. Glicerina	1,5	168 000	1 263	$1,19 \times 10^{-3}$	10 200

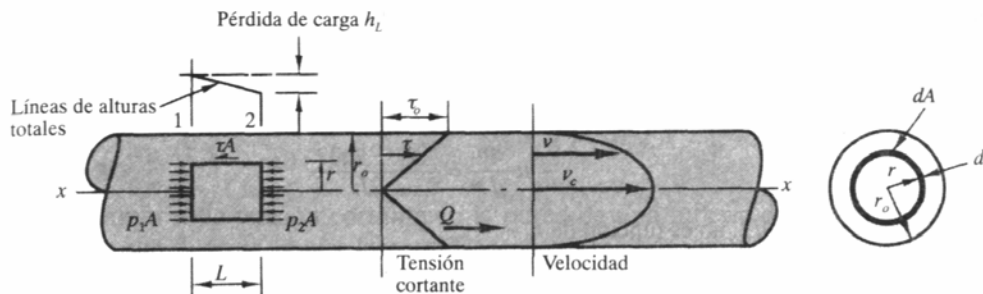
Como la mayoría de los gases y los líquidos (agua y aire) simples cumplen la ley de Newton nos centraremos en su estudio en este apartado.

3.3. ECUACIONES BÁSICAS PARA LOS FLUIDOS REALES

3.3.1. Ecuación de continuidad o conservación de la masa

Tanto el flujo laminar como el turbulento pueden ser internos o sea confinados por paredes, o externos y libres. Nosotros estudiaremos solamente los flujos internos. Como ejemplo de análisis de flujo viscoso vamos a considerar el problema clásico de flujo en un tubo originado por un gradiente de presión, la gravedad o ambos.

Consideremos una tubería cilíndrica de radio r_0 a través de la cual fluye un líquido homogéneo e incompresible en régimen laminar y de viscosidad cinemática ν . Si consideramos régimen estacionario, esto es $\nu \neq \nu(t)$, cada una de las partículas se mueve sin aceleración en la dirección axial y la suma de fuerzas en esta dirección debe ser nula. Para establecer la ecuación de equilibrio consideremos un cilindro imaginario de radio r y longitud L dentro de la tubería cilíndrica:



$$\sum F = 0 \Rightarrow P_1(\pi r^2) - P_2(\pi r^2) - \tau 2\pi r L = 0 \Rightarrow \tau = \frac{(P_1 - P_2)r}{2L}$$

Cuando $r = 0$ la tensión cortante τ se anula y cuando $r = r_0$ **la tensión sobre la pared coincide con el máximo de la tensión**. La variación es lineal, tal y como se representa en la figura. La ecuación deducida para las tensiones cortantes es válida tanto para flujo laminar como turbulento, ya que en la deducción de la misma no se ha impuesto limitación alguna respecto al tipo de flujo.

En el caso de un flujo laminar y fluido newtoniano, la relación entre la tensión cortante y la tasa de cambio de velocidad es lineal, esto es $\tau = -\mu \left(\frac{dv}{dr} \right)$. Igualando esta expresión con el valor obtenido para τ en la ecuación anterior se obtiene:

$$-\mu \left(\frac{dv}{dr} \right) = \frac{(P_1 - P_2)r}{2L}$$

Como $\frac{P_1 - P_2}{L}$ no es función de r :

$$-\int_{v_c}^v dv = \frac{P_1 - P_2}{2\mu L} \int_0^r r dr \Rightarrow v = v_c - \frac{(P_1 - P_2)r^2}{4\mu L}$$

Siendo v_c la velocidad en el eje de la tubería o velocidad máxima. Como la velocidad en el contorno es cero, esto es, cuando $r = r_0$, $v = 0$ se tiene que la velocidad en el eje es:

$$v_c = \frac{(P_1 - P_2)r_0^2}{4\mu L}$$

Por tanto, la expresión de **distribución de velocidades**:

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\mu L} (r_0^2 - r^2)$$

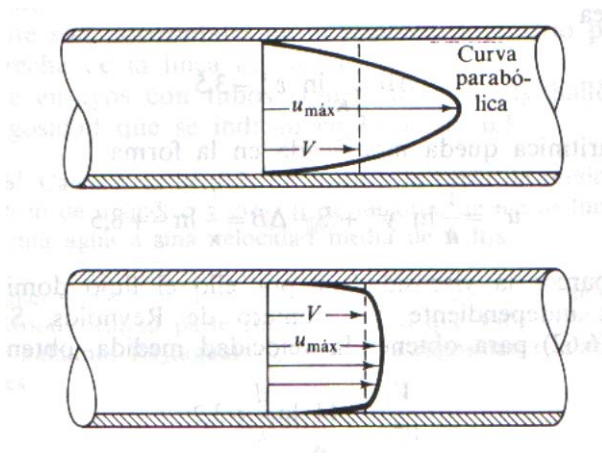
La ley de distribución de velocidades corresponde a la ecuación de una parábola cuyo eje coincide con el de la tubería tal y como se ha representado en la figura.

El gasto o caudal de una sección elemental dS en la cual la velocidad es constante (coronas circulares de radio exterior r y anchura tan pequeña como dr) viene dado por $dQ = v dS$, siendo el caudal total la suma de los caudales elementales, esto es la siguiente integral:

$$Q = \int_S v dS = \int_0^{r_0} v 2\pi r dr = \pi \frac{P_1 - P_2}{2\mu L} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r dr = \pi \frac{P_1 - P_2}{8\mu L} r_0^4$$

que constituye la **fórmula de Poiseuille**. La expresión del caudal se puede escribir en función de la velocidad máxima como $Q = \frac{1}{2} \pi r_0^2 v_c$ y si tenemos en cuenta que $Q = \bar{v} S$ y que la sección es πr_0^2 se tiene que $\bar{v} = \frac{1}{2} v_c$.

En el desarrollo llevado a cabo no hemos tenido en cuenta la rugosidad de la pared de la tubería: Hasta los experimentos de Coulomb en 1800 no se supo que la rugosidad de la pared influía en la fricción. Sucede que este efecto es despreciable en flujo laminar y las fórmulas obtenidas en esta sección para régimen laminar son válidas incluso con paredes rugosas. En el caso de flujos turbulentos existen distintas expresiones para la distribución de velocidades deducidas a partir de los datos experimentales de Nikuradse y otros investigadores y si se ven afectados por la rugosidad. En las siguientes figuras se comparan los perfiles de velocidad en dos flujos, laminar y turbulento con el mismo caudal:



3.3.2. Concepto de capa límite

Según una hipótesis propuesta por Prandtl (1904) confirmada experimentalmente para fluidos con viscosidad pequeña el rozamiento interno entre láminas del fluido en un conducto puede considerarse despreciable, salvo en una pequeña región, la llamada **capa límite**, en la frontera del fluido. En el ejemplo anterior de la tubería se observa que la tensión cortante es máxima precisamente en ese punto. En la zona más cercana al contorno fijo el gradiente de velocidades es grande y aunque la viscosidad sea pequeña las fuerzas internas de rozamiento son apreciables. En las zonas más alejadas del contorno dicho gradiente es pequeño y por tanto, las fuerzas de rozamiento despreciables. Por tanto, el flujo lejos de las paredes de la tubería puede considerarse prácticamente no viscoso, mientras que se utiliza la teoría de la capa límite para determinar el movimiento en la capa viscosa cerca de las paredes, que se empalma con la solución exterior no viscosa. Este empalme es tanto más efectivo cuanto mayor es el número de Reynolds.

3.3.3. Ecuación de conservación de la energía

Si no existe fricción la ley de conservación de la energía se escribe:

$$gz_1 + \frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} = gz_2 + \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} = cte$$

Esta expresión de la energía total se puede escribir de la siguiente manera como suma de términos expresados todos ellos en unidades de longitud:

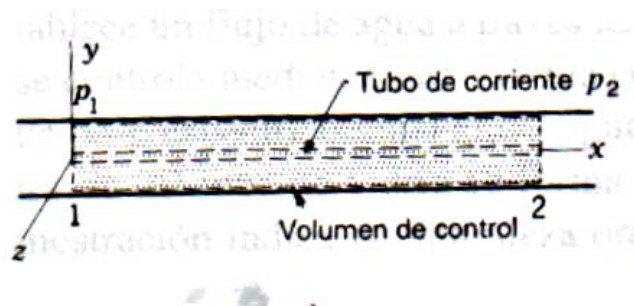
$$h = z + \frac{P}{g\rho} + \frac{V^2}{2g} = z + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$$

La energía total expresada de esta manera se llama “**altura de carga**”. El término z se llama *cota topográfica* o *altura geométrica*, $\frac{V^2}{2g}$ se conoce como *altura de velocidad* y $\frac{P}{\gamma}$ como *altura de presión*.

La suma de las alturas de presión $\frac{P}{\gamma}$ y la geométrica z recibe el nombre de *altura piezométrica*. Asimismo se denomina **altura total** a la suma de los tres elementos de la ecuación de Bernoulli, correspondiendo a la energía total por unidad de peso del fluido. Esta ecuación de Bernoulli se había deducido a partir de la expresión de la primera ley de la Termodinámica, esto es:

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_{otros}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \left(\frac{V^2}{2} + gz + u \right) (\rho dV) + \int_S \left(\frac{V^2}{2} + gz + u + \frac{P}{\rho} \right) (\rho \vec{V} \cdot d\vec{S})$$

Consideremos un flujo permanente, laminar e incompresible a través de una tubería recta y horizontal como se muestra en la siguiente figura:



Examinemos el flujo entre las secciones 1 y 2 de la tubería. Supongamos también que no hay cambio en el perfil de velocidades, de modo que el cociente $\frac{V^2}{2}$ tiene el mismo valor en las secciones 1 y 2. Teniendo en cuanto todo esto la primera ley de la Termodinámica para el volumen de control compuesto por la región interior de la tubería entre las secciones 1 y 2, esto es la ley puede expresarse como:

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_{S_1} \left(\frac{V_1^2}{2} + gz_1 + u_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) (\rho V dS) + \int_{S_2} \left(\frac{V_2^2}{2} + gz_2 + u_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) (\rho V dS)$$

Esta ecuación puede escribirse como:

$$\frac{dQ}{dt} = \left[\left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} \right) + (gz_2 - gz_1) + \left(\frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} \right) \right] \int_S \rho V dS = \left[\left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} \right) + (gz_2 - gz_1) + \left(\frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} \right) \right] \frac{dm}{dt}$$

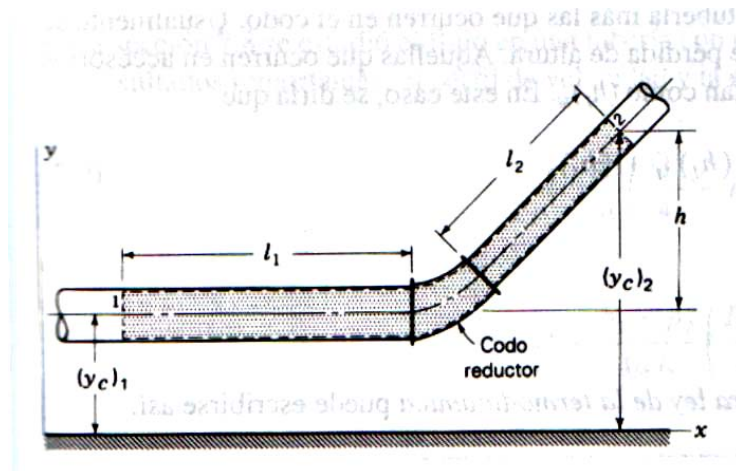
Reordenando los términos:

$$\frac{dQ}{dt} = \left[\frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} \right] \frac{dm}{dt} \Rightarrow \frac{dQ}{dm} = \left[\frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} \right] \Rightarrow \frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} = \frac{\Delta p}{\rho} = \left[- \frac{dQ}{dm} \right]$$

La expresión nos indica que existe una pérdida de energía por unidad de masa del fluido debido a la transferencia de calor desde el fluido dentro del volumen de control hacia sus alrededores. Esta pérdida de energía debida a la fricción se traduce en una pérdida de altura Δh se puede interpretar como una pérdida de presión por unidad de masa. Esto es:

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \Delta h = \left[- \frac{dQ}{dm} \right]$$

Si además los diámetros de los tubos conectados mediante un codo reductor conecta tubería de distinta sección teniendo en cuenta la ecuación de continuidad se hubiese llegado al siguiente resultado:



$$\frac{\Delta p}{\rho} = \Delta h + g(y_2 - y_1) + \left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} \right)$$

Esto es en resumen hemos visto que existe una pérdida de altura de forma continua a lo largo del flujo por el hecho de que existe fricción y el fluido avanza, aunque no cambie ni la dirección del flujo ni la sección de la tubería. Si, manteniéndose constante el perfil de velocidades, existe cambio en la altura de la tubería la caída en la presión se debe a dicho cambio de elevación y a la fricción. También representan disipaciones adicionales de energía los cambios de sección o de dirección de la tubería. Esto debe tenerse en cuenta en la ecuación de Bernoulli de la forma siguiente:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{12}$$

donde al término ΔH_{12} se le denomina **pérdida de carga o pérdida de altura total** que incluye las pérdidas por fricción y las pérdidas por accesorios que se suelen denominar pérdidas de cargas menores.

Con frecuencia esta ecuación se conoce como ecuación de Bernoulli modificada y puede aplicarse a cualquier serie de tubos interconectados mediante diferentes clases de accesorios conectores.

A continuación veremos una serie de expresiones que nos permiten calcular cada una de las pérdidas de carga o altura individuales, por fricción y menores.

3.4. PÉRDIDAS DE CARGA

a) Debidas a la fricción

Las pérdidas de carga son función del perfil de velocidad, del tipo de fluido, de la geometría del sistema y algunas veces de la rugosidad de la superficie de la tubería. Experimentalmente se observa que las pérdidas de carga son en general proporcionales al cuadrado de la velocidad promedio en la mayor parte de los casos de interés práctico. Esta observación se expresa en función de la altura de velocidad en la ecuación de Darcy-Weiesbach para las pérdidas de carga en tuberías y conductos debidas al rozamiento:

$$\Delta h = f \frac{L \bar{v}^2}{d 2g}$$

siendo L la longitud de la tubería, d el diámetro de la tubería y f el coeficiente de fricción que depende del número de Reynolds, de la rugosidad relativa de la tubería y de su sección. En este último caso no sólo es importante la magnitud de la sección sino también la forma de la sección de la canalización. El factor o coeficiente de fricción f puede deducirse en el caso del régimen laminar, más en el caso de flujo turbulento no se dispone de relaciones matemáticas sencillas para obtener la variación de f con el número de Reynolds:

(a) Para *régimen laminar y tuberías circulares*, el coeficiente de fricción viene dado por :

$$f = \frac{64}{\text{Re}}$$

con un valor práctico de Re inferior a 2300. Cuando las canalizaciones no son cilíndricas, la relación entre el número de Reynolds y el coeficiente de fricción es de la forma:

$$f = \frac{k}{\text{Re}}$$

donde k es un factor geométrico de valor 56,91 para un cuadrado, 62,19 para un rectángulo cuyos lados guardan la proporción 2:1 y 76,28 si la relación de proporcionalidad entre los lados es 5:1.

(b) Para *flujo turbulento* muchos ingenieros hidráulicos e investigadores se han esforzado en el cálculo de f tanto a partir de sus propios resultados como de los resultados obtenidos por otros investigadores. Por ejemplo:

- Para *tuberías lisas*, Blasius ha sugerido con el número de Reynolds comprendido entre 3000 y 100.000:

$$f = \frac{0,316}{\text{Re}^{0,25}}$$

Para valores de Re hasta 3.000.000, aproximadamente, se utiliza la ecuación de von Karman:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log(\text{Re} \sqrt{f}) - 0,8$$

- Para *tuberías rugosas*:

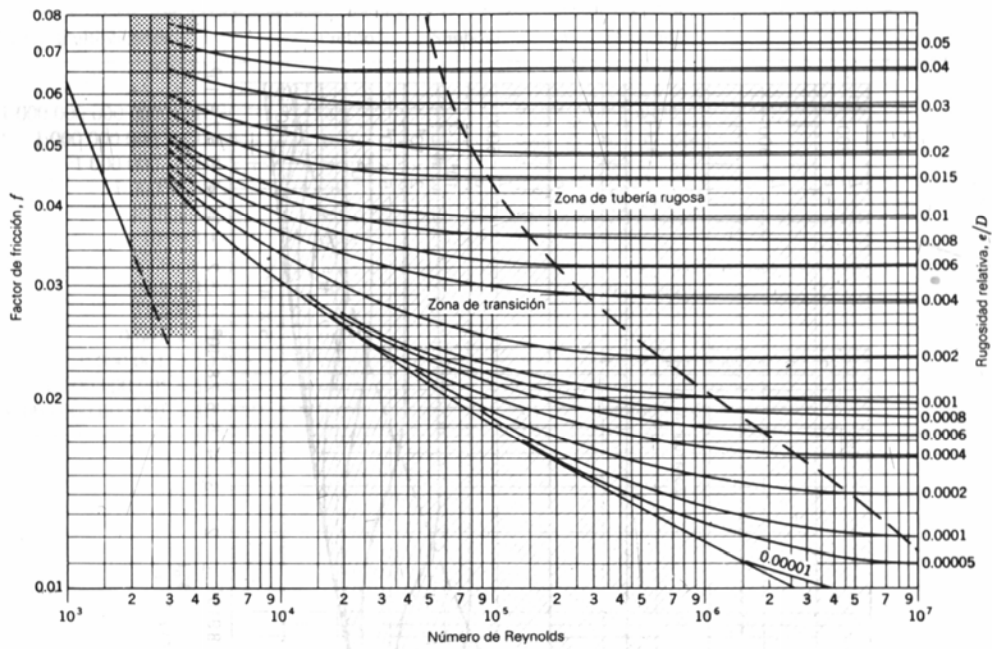
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log\left(\frac{d}{2\varepsilon}\right) + 1,74$$

siendo ε el coeficiente de rugosidad y d el diámetro de la conducción.

- Para todas las tuberías, el Hydraulic Institute de los Estados Unidos y la mayoría de los ingenieros consideran la ecuación de Colebrook como la más aceptable para calcular f . La ecuación es:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,14 - 2 \log \left[\frac{\varepsilon}{d} + \frac{9,35}{\text{Re} \sqrt{f}} \right]$$

Aunque esta ecuación es de resolución muy engorrosa, ya que f no aparece de forma explícita y debe resolverse mediante iteraciones, se dispone de diagramas que dan las relaciones existentes entre el coeficiente de fricción f , el número de Reynolds Re y la rugosidad relativa $\frac{\varepsilon}{d}$. Por ejemplo, está el diagrama de Moddy que hizo un estudio extenso en tuberías comerciales. El diagrama de Moddy es una representación logarítmica de la ecuación de Colebrook como se observa en la figura, en dicho diagrama puede encontrarse el valor de f para distintos valores de la rugosidad relativa y el número de Reynolds. En ella también se incluye la relación $f = \frac{64}{\text{Re}}$ para flujo laminar.



La ecuación escrita anteriormente corresponde a la *zona de transición*. En la *zona de tubería rugosa*, f no depende del número de Reynolds, de manera que al considerar la ecuación significa que

$\frac{e}{d} \gg \frac{9,35}{Re\sqrt{f}}$, por consiguiente puede darse la ecuación para f explícitamente como sigue para esta zona

de flujo:

$$f = \frac{1}{\left[1.14 - 2 \log\left(\frac{e}{d}\right)\right]^2}$$

Antes de utilizar los diagramas, el ingeniero ha de poder estimar la rugosidad relativa de la tubería a partir de su propia experiencia y de la de los demás. Los valores sugeridos para el tamaño de las imperfecciones superficiales en el caso de tuberías nuevas son los siguientes:

Tipo de revestimiento (nuevo)	Valores de ε en cm
Latón	0.00015
Cobre	0.00015
Hormigón	0.03-0.3
Fundición revestida de cemento	0.00024
Hierro galvanizado	0.006-0.024
Hierro forjado	0.003-0.009
Acero comercial y soldado	0.003-0.009
Madera	0.018-0.09

b) Pérdidas de carga menores

En cualquier sistema de tubería, además de la pérdida de carga por fricción a lo largo de aquellas existen pérdidas menores o localizadas debidas a :

- entrada o salida de tubería
- ensanchamiento o contracción brusca
- curvas, codos, tes y otros accesorios
- válvulas abiertas o parcialmente cerrada
- ensanchamientos o contracciones graduales

Como ya se ha indicado cuando analizamos la primera ley de la Termodinámica estas pérdidas asociadas a una variación significativa de la configuración del grupo se agrupan con el nombre de pérdidas de carga menores. No obstante, en algunos casos estas pérdidas “menores” pueden ser muy importantes.

Como la configuración del flujo en estos elementos es muy compleja la teoría existente es en general, pobre. Habitualmente las pérdidas se miden experimentalmente y se correlacionan con los parámetros del flujo. Los datos, especialmente en válvulas, dependen además del diseño de cada fabricante, de modo que los valores que se indican en esta sección son muchas veces simples estimaciones medias. Comúnmente se expresan en la forma:

$$\Delta h = K \frac{v^2}{2g}$$

donde K es un coeficiente que se obtiene a veces de forma teórica y a veces de forma experimental y que se encuentra en los manuales de hidráulica. No hay que olvidar que aunque en las tablas K aparece como constate, en general tiene alguna dependencia de las condiciones del flujo, de la geometría exacta del componente en cuestión, del número de Reynolds, de la proximidad de otros elementos.... Los valores que aparecen tabulados en las tablas de hidráulica son para componentes aislados. De todos los elementos mencionados, las válvulas son las más sensibles al diseño del fabricante debido a su complejidad geométrica. Por otro lado, las pérdidas en la entrada dependen mucho de la geometría, mientras que las de la salida no.

La velocidad V que aparece en la expresión puede estipularse en el manual como la velocidad promedio aguas arriba o agua abajo hacia el accesorio o desde éste respectivamente. En la siguiente tabla se utiliza el subíndice 1 para representar los valores aguas arriba y 2 para representar la situación agua abajo.

TABLA 4

PERDIDAS DE CARGA EN ACCESORIOS

(Subíndice 1 = aguas arriba y subíndice 2 = aguas abajo)

Accesorio	Pérdida de carga media
1. De depósito a tubería (pérdida a la entrada)	
— conexión a ras de la pared	$0,50 \frac{V_2^2}{2g}$
— tubería entrante	$1,00 \frac{V_2^2}{2g}$
— conexión abocinada	$0,05 \frac{V_2^2}{2g}$
2. De tubería a depósito (pérdida a la salida)	$1,00 \frac{V_1^2}{2g}$
3. Ensanchamiento brusco	$\frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$
4. Ensanchamiento gradual (véase Tabla 5)	$K \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$
5. Venturímetros, boquillas y orificios	$\left(\frac{1}{c_v^2} - 1\right) \frac{V_2^2}{2g}$
6. Contracción brusca (véase Tabla 5)	$K_c \frac{V_2^2}{2g}$
7. Codos, accesorios, válvulas*	$K \frac{V^2}{2g}$
Algunos valores corrientes de K son:	
45°, codo	0,35 a 0,45
90°, codo	0,50 a 0,75
Tes	1,50 a 2,00
Válvulas de compuerta (abierta) . . .	aprox. 0,25
Válvulas de control (abierta)	aprox. 3,0

* Véanse manuales de hidráulica para más detalles.

TABLA 5
VALORES DE K
Contracciones y ensanchamientos

Contracción brusca		Ensanchamiento gradual para un ángulo total del cono						
d_1/d_2	K_c	4°	10°	15°	20°	30°	50°	60°
1,2	0,08	0,02	0,04	0,09	0,16	0,25	0,35	0,37
1,4	0,17	0,03	0,06	0,12	0,23	0,36	0,50	0,53
1,6	0,26	0,03	0,07	0,14	0,26	0,42	0,57	0,61
1,8	0,34	0,04	0,07	0,15	0,28	0,44	0,61	0,65
2,0	0,37	0,04	0,07	0,16	0,29	0,46	0,63	0,68
2,5	0,41	0,04	0,08	0,16	0,30	0,48	0,65	0,70
3,0	0,43	0,04	0,08	0,16	0,31	0,48	0,66	0,71
4,0	0,45	0,04	0,08	0,16	0,31	0,49	0,67	0,72
5,0	0,46	0,04	0,08	0,16	0,31	0,50	0,67	0,72

Fuente: Valores tomados de King, *Handbook of Hydraulics*, McGraw-Hill Book Company, 1954.

c) Pérdidas de cargas debidas a una máquina

Las máquinas hidráulicas pueden aportar energía al flujo como las **bombas** o extraer energía del flujo como las **turbinas**. La misión de una bomba es incrementar la energía del fluido que pasa por ellas. El aporte de energía que realiza una bomba al flujo se representa habitualmente a través de la energía aportado por unidad de peso de fluido. Si la potencia de una bomba es P y el caudal de fluido en peso que la atraviesa es $\rho g Q$, la energía específica (por unidad de peso) que la bomba suministra a la corriente fluida es:

$$\Delta h = \frac{P_{bomba}}{\rho g Q}$$

La misión de una turbina es extraer energía del fluido, disminuyendo su energía. Análogamente al caso de las bombas la pérdida de altura o carga debido a la turbina se expresa como la energía que se extrae por unidad de peso del fluido, y esta relacionada por la potencia extraída por la turbina mediante:

$$\Delta h = \frac{P_{turbina}}{\rho g Q}$$

Estas expresiones deben considerarse con sus signos correspondientes, siguiendo el sentido del flujo, a la energía inicial hay que añadirle todas las energías aportadas por bombas y hay que restarle las energías extraídas por turbinas.

d) Representación gráfica de la pérdida de carga

Los ingenieros civiles encuentran muy útil representar gráficamente los términos de altura que contribuyen a la energía mecánica del flujo en una tubería:

$$\Delta h = \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z - \Delta h_{p\acute{e}rdidas} + \Delta h_{ganancias}$$

Se va representando en cada punto el valor de esta expresión según las pérdidas y ganancias encontradas por el flujo en su camino. A la línea resultante se le llama línea de altura total y la línea de altura piezométrica se obtiene restando a la línea de altura total la altura de velocidad, esto es, el término

$\frac{v^2}{2g}$. En la siguiente figura se muestra un ejemplo:

