



***INTERPOLACIÓN:
Error en la interpolación polinómica
de Lagrange***

**Arturo Hidalgo López
Alfredo López Benito
Carlos Conde Lázaro**

Marzo, 2007



OBJETIVOS

- 1°. Obtener y aplicar la expresión que proporciona el error de interpolación en el proceso de interpolación polinómica de Lagrange.
- 2°. Obtener cotas del error de interpolación de Lagrange



Teorema de expresión del error

NOTACIÓN:

Soporte: $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ formado por $(n+1)$ puntos distintos de (a, b)

Función que se interpola: $f(x)$

Valores de la función en el soporte: $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$

Polinomio interpolador de Lagrange: $p_n(x)$

TEOREMA

Si $f \in C^{(n+1)}((a,b))$ entonces :

$$\begin{aligned} \forall x^* \in (a, b) \quad \exists \xi^* = \xi(x^*) \quad / \quad E(x^*) = f(x^*) - p_n(x^*) = \\ = \frac{f^{(n+1)}(\xi^*)}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=0}^n (x^* - x_i) \end{aligned}$$

Teorema de expresión del error: Demostración

- a) Si $x^* \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ el teorema es evidente.
b) Si $x^* \notin \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$:

Sea:
$$F: x \rightarrow f(x) - p_n(x) - \frac{f(x^*) - p_n(x^*)}{\prod_{i=0}^n (x^* - x_i)} \cdot \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Se verifica que:

$$F(x_i) = 0 \quad (i = 0, \dots, n)$$

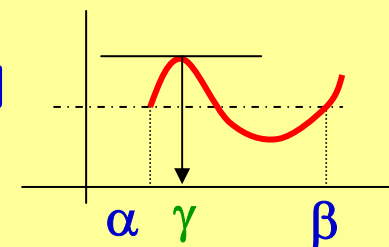
$$F(x^*) = 0$$

$$F \in C^{(n+1)}((a,b))$$

$F(x)$ tiene al menos $(n+2)$ raíces distintas en (a, b)

RECORDATORIO: Teorema de Rolle

Si $g(x)$ es una función de clase $C^1(a, b)$ y $g(a) = g(b)$, entonces existe $\gamma \in (a, b)$ tal que $g'(\gamma) = 0$



Teorema de expresión del error: Demostración

- a) Si $x^* \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ el teorema es evidente.
b) Si $x^* \notin \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$:

Sea: $F: x \rightarrow f(x) - p_n(x) - \frac{f(x^*) - p_n(x^*)}{\prod_{i=0}^n (x^* - x_i)} \cdot \prod_{i=0}^n (x - x_i)$

Se verifica que:

$$F(x_i) = 0 \quad (i = 0, \dots, n)$$

$$F(x^*) = 0$$

$$F \in C^{(n+1)}((a,b))$$

$F(x)$ tiene al menos $(n+2)$ raíces distintas en (a, b)

(Aplicando n veces el teorema de Rolle)

$F^{(n+1)}(x)$ tiene al menos 1 raíz $\xi^* \in (a,b)$

$$0 = F^{(n+1)}(\xi^*) = f^{(n+1)}(\xi^*) - \frac{f(x^*) - p_n(x^*)}{\prod_{i=0}^n (x^* - x_i)} \cdot (n+1)! \rightarrow E(x^*) = \frac{f^{(n+1)}(\xi^*)}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=0}^n (x^* - x_i)$$

c.q.d.

Algunas acotaciones del error

$$\forall \mathbf{x}^* \in (a,b) \exists \xi^* = \xi(\mathbf{x}^*) / \mathbf{E}(\mathbf{x}^*) = \frac{f^{(n+1)}(\xi^*)}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=0}^n (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_i)$$

$$\downarrow \mathbf{M} = \sup_{x \in (a,b)} |f^{(n+1)}(x)|$$

$$\forall \mathbf{x} \in (a,b) : |\mathbf{E}(\mathbf{x})| \leq \frac{\mathbf{M}}{(n+1)!} \cdot \left| \prod_{i=0}^n (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \right|$$

$$\downarrow \forall \mathbf{x} \in (a,b) : |\mathbf{E}(\mathbf{x})| \leq \frac{\mathbf{M}}{(n+1)!} \cdot \sup_{x \in (a,b)} \left| \prod_{i=0}^n (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \right|$$

$$\downarrow h = |b - a|$$
$$\forall \mathbf{x} \in (a,b) : |\mathbf{E}(\mathbf{x})| \leq \frac{\mathbf{M}}{(n+1)!} \cdot h^{(n+1)} \sim \mathcal{O}(h^{n+1})$$



Ejemplo 1° (1/11)

EJEMPLO 1 de error de interpolación de Lagrange

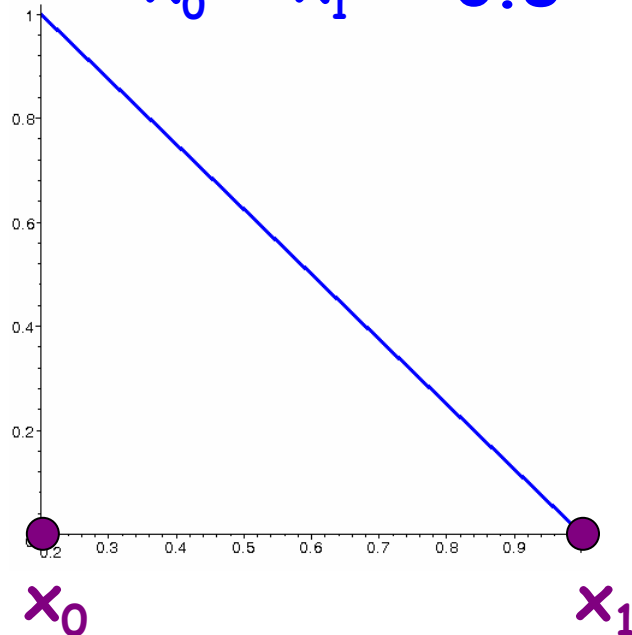
Sea la función $f : x \rightarrow 2 \cdot x \cdot e^{-(4x+2)}$ definida en $[0.2, 1]$

- Calcular y representar gráficamente los polinomios de base de Lagrange asociados al soporte $\{0.2, 1.0\}$
- Hallar el polinomio $p(x)$ que interpola $f(x)$ en el sentido de Lagrange sobre el soporte $\{0.2, 1\}$
- Obtener la expresión del error de interpolación
- Hallar una cota de error válida en todo $(0.2, 1)$

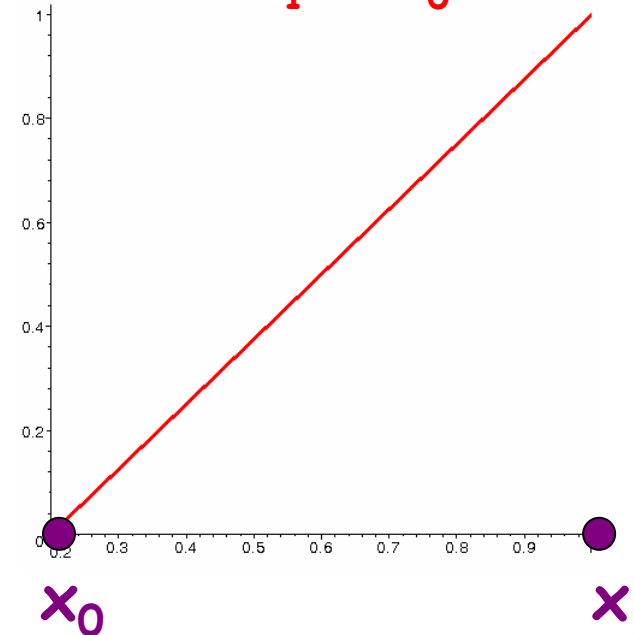
Ejemplo 1° (2/11)

Solución del apartado a): Polinomios de base de Lagrange

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{1 - x}{0.8}$$



$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - 0.2}{0.8}$$

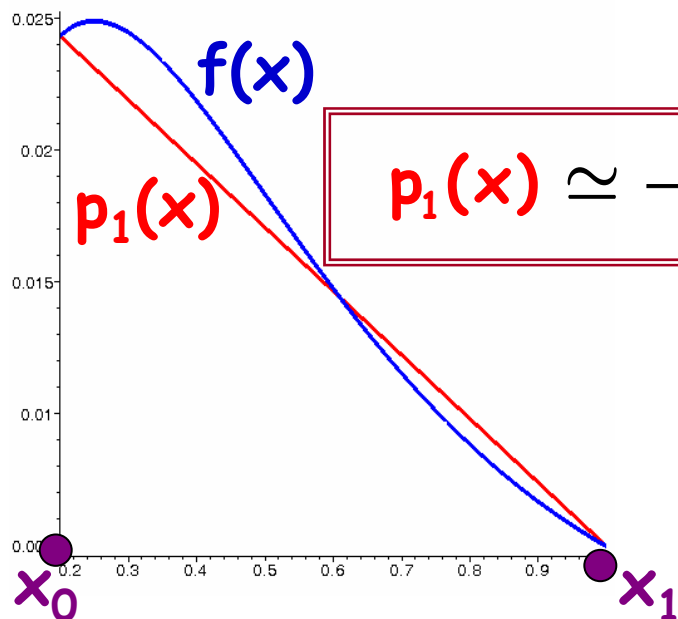


(NOTA: Se puede comprobar que $L_0(x) + L_1(x) = 1$)

Ejemplo 1° (3/11)

Solución del apartado b) Polinomio interpolador de Lagrange

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f(x_0) \cdot L_0(x) + f(x_1) \cdot L_1(x) = \\ &= (0.4) \cdot e^{-2.8} \cdot \frac{1-x}{0.8} + 2 \cdot e^{-6} \cdot \frac{x-0.2}{0.8} \end{aligned}$$



$$p_1(x) \simeq -0.02420815088 x + 0.02916565523$$



Ejemplo 1° (4/11)

Solución del apartado c): Expresión del error

Aplicamos la expresión: $\varepsilon(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j)$

Como el número de puntos es $n+1 = 2$ se deriva DOS veces $f(x)$

$$f'(x) = (2 - 8 \cdot x) \cdot e^{-(4 \cdot x + 2)}$$

$$f''(x) = (-16 + 32 \cdot x) \cdot e^{-(4 \cdot x + 2)}$$

$$\varepsilon(x) = f(x) - p(x) = \frac{f''(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j) \Rightarrow$$

$$\varepsilon(x) = f(x) - p(x) = \frac{(-16 + 32 \cdot \xi_x) \cdot e^{-(4 \cdot \xi_x + 2)}}{2!} (x - 0.2)(x - 1)$$

$$\varepsilon(x) = f(x) - p(x) = \frac{(-16 + 32 \cdot \xi_x) \cdot e^{-(4 \cdot \xi_x + 2)}}{2} (x^2 - 1.2x + 0.2)$$



Ejemplo 1° (5/11)

Solución del apartado d): Cota de error

$$|\varepsilon(x)| = |f(x) - p(x)| \leq \frac{\max_{x \in [0.2, 1]} |f''(x)|}{3!} \max_{x \in [0.2, 1]} \left| \prod_{j=0}^1 (x - x_j) \right|$$

Hallemos, en primer lugar $\max |f''(x)|$

Llamamos: $g(x) = f''(x)$

Dado que la función $g(x)$ es continua en $[0.2, 1]$, su mayor valor absoluto en $[0.2, 1]$ será el mayor de los siguientes:

Valor de $|g(x)|$ en las abscisas de $[0.2, 1]$ para las que $g'(x) = 0$.

Valor de $|g(0.2)|$.

Valor de $|g(1)|$.



Ejemplo 1º (6/11)

Valor de $|g(x)|$ en las abscisas para las que $g'(x) = 0$.

$$g(x) = (-16 + 32.x).e^{-(4x+2)} \Rightarrow g'(x) = (96 - 128.x).e^{-(4x+2)}$$

$$g'(x^*) = 0 \Leftrightarrow (96 - 128.x^*).e^{-(4x^*+2)} = 0 \Leftrightarrow x^* = \frac{96}{128} = 0.75$$

$$\text{de donde: } |g(0.75)| \simeq 0.0539 \quad (1)$$

Valor de $g(x)$ en los extremos del intervalo $[0.2, 1]$.

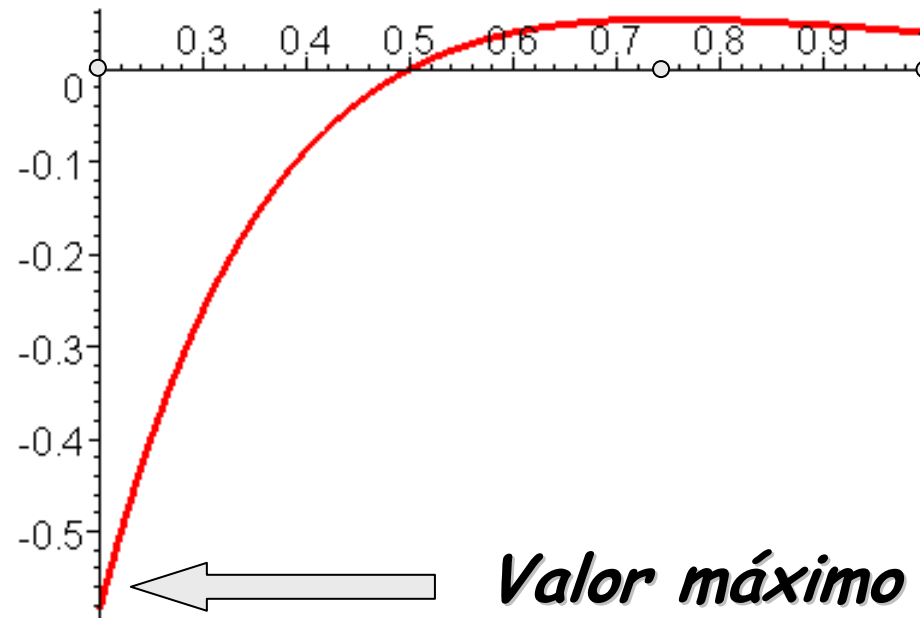
$$|g(0.2)| \simeq |-0.5838| = 0.5838 \quad (2)$$

$$|g(1)| \simeq |0.0397| = 0.0397 \quad (3)$$

El mayor valor absoluto de entre (1), (2) y (3) es: 0.5838
(obtenido para $x = 0.2$)

Ejemplo 1° (7/11)

Gráfico en $[0.2, 1]$ de la función $g(x) = f''(x)$

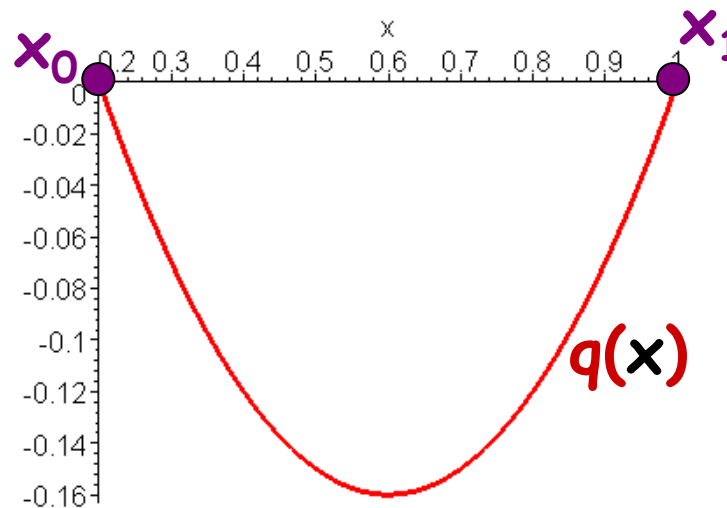


Ejemplo 1° (8/11)

Buscamos ahora $\max_{x \in [0.2, 1]} |(x - 0.2)(x - 1)|$

Llamamos $q(x) = (x - 0.2)(x - 1) = x^2 - 1.2x + 0.2$

$q(x)$ es un polinomio de segundo grado que se anula en los puntos 0.2 y 1, luego, necesariamente, tendrá algún extremo en el intervalo $[0.2, 1]$.





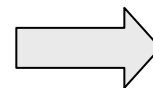
Ejemplo 1º (9/11)

El máximo de $|q(x)|$ se alcanzará en los puntos que se obtienen resolviendo la ecuación $q'(x) = 0$:

$$q'(x) = 0 = 2x - 1.2$$

de donde se obtiene $x = 0.6$ como abscisa en la que se encuentra el máximo de $q(x)$:

resultando: $q(0.6) = -0.16$



$$|q(0.6)| = 0.16$$



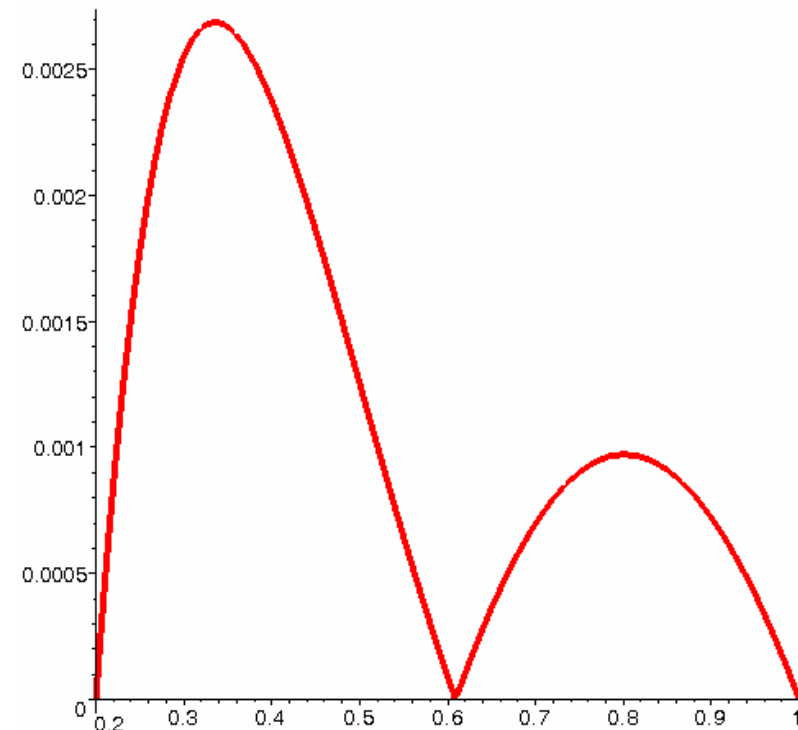
Ejemplo 1º (10/11)

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, UNA cota de error vendrá dada por:

$$|\varepsilon(x)| = |f(x) - p(x)| \leq \frac{0.5838}{2} \cdot (0.16) = 0.046704$$

Ejemplo 1° (11/11)

La cota del error obtenida es una cota "teórica". Si se representa el valor absoluto del error exacto (e.p. hacerlo):
 $|\varepsilon(x)| = |f(x) - p(x)|$
se obtiene la siguiente figura:



El error máximo real que se comete es del orden de 0.0026, mucho menor que la cota teórica (0.046702). A menudo, las cotas a las que conduce el teorema de acotación del error son "conservadoras".



Ejemplo 2° (1/11)

Sea la función $f(x) = \text{sen}(5 \cdot x + 2)$ $x \in \left[0, \frac{\pi}{10}\right]$

a) Calcular y representar gráficamente los polinomios de base de Lagrange asociados al soporte

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{20}, x_2 = \frac{\pi}{10} \right\}$$

b) Hallar el polinomio $p(x)$ que interpola $f(x)$ en el sentido de Lagrange sobre el soporte de apartado anterior

c) Obtener la expresión del error de interpolación

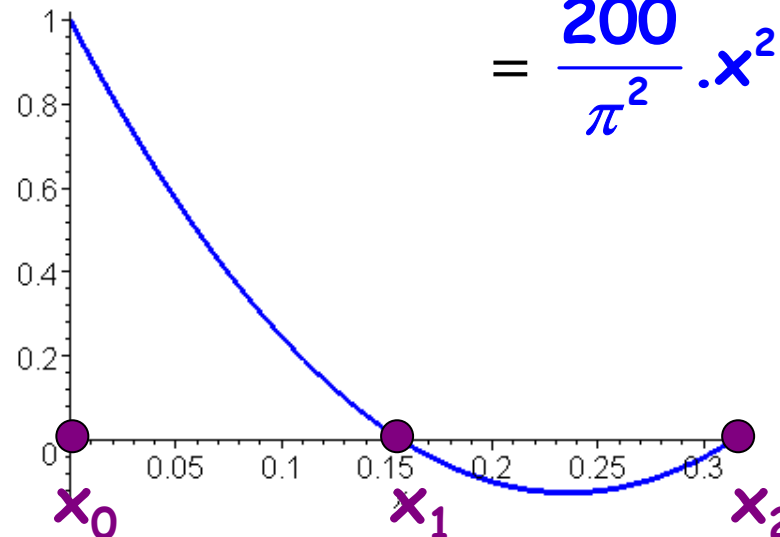
d) Hallar una cota de error válida $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{10}\right]$



Ejemplo 2° (2/11)

Solución del apartado a): Polinomios de base de Lagrange

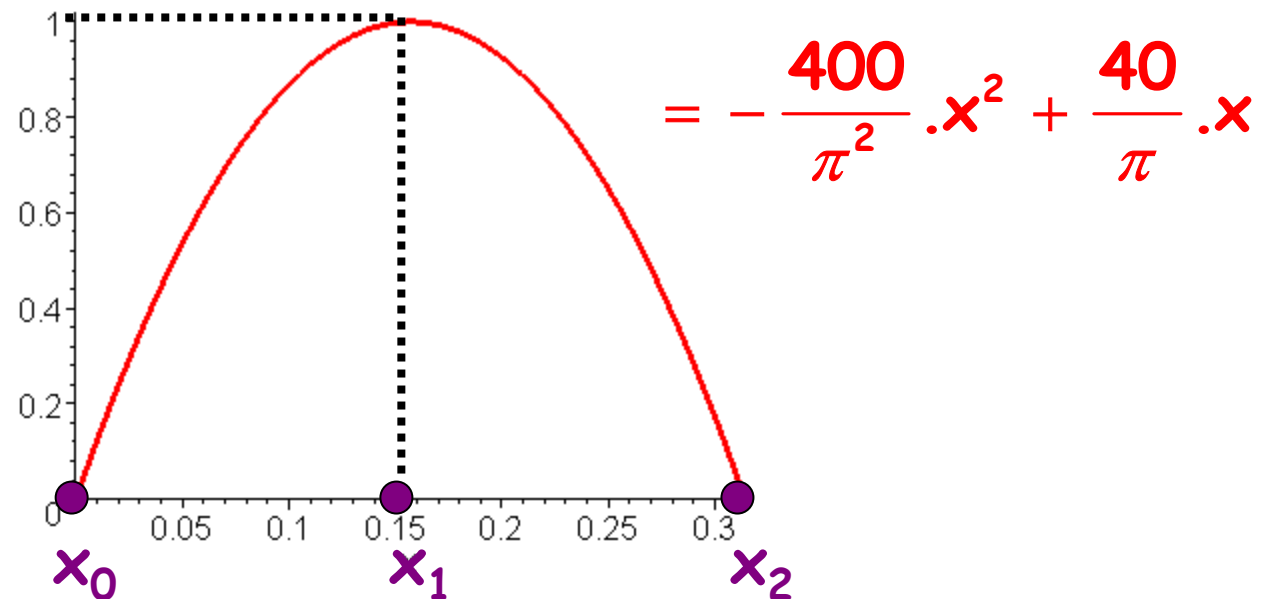
$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{\left(x - \frac{\pi}{20}\right)\left(x - \frac{\pi}{10}\right)}{\left(0 - \frac{\pi}{20}\right)\left(0 - \frac{\pi}{10}\right)} =$$
$$= \frac{200}{\pi^2} \cdot x^2 - \frac{30}{\pi} \cdot x + 1$$



Ejemplo 2° (3/11)

Polinomios de base de Lagrange (2)

$$L_1(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0)\left(x - \frac{\pi}{10}\right)}{\left(\frac{\pi}{20} - 0\right)\left(\frac{\pi}{20} - \frac{\pi}{10}\right)} =$$

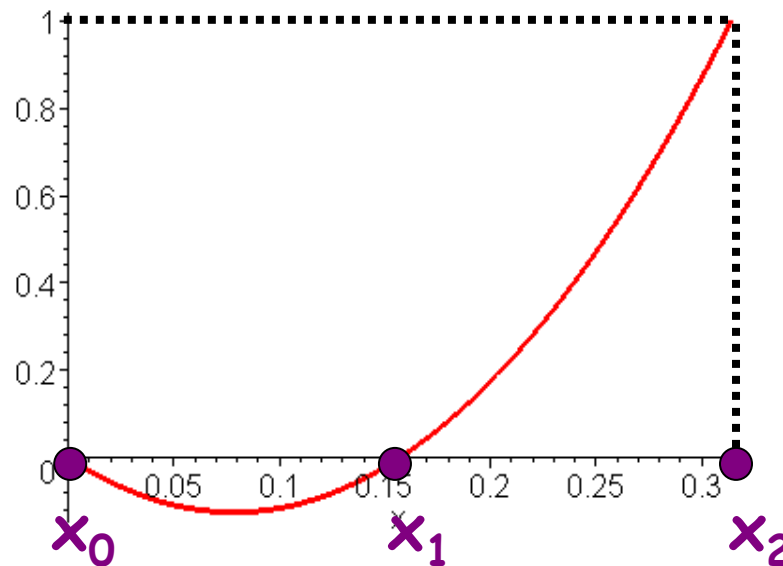




Ejemplo 2° (4/11)

Polinomios de base de Lagrange (3)

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0)\left(x - \frac{\pi}{20}\right)}{\left(\frac{\pi}{10} - 0\right)\left(\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{20}\right)}$$



$$= \frac{200}{\pi^2} \cdot x^2 - \frac{10}{\pi} \cdot x$$



Ejemplo 2º (5/11)

Solución del apartado b) Polinomio interpolador de Lagrange

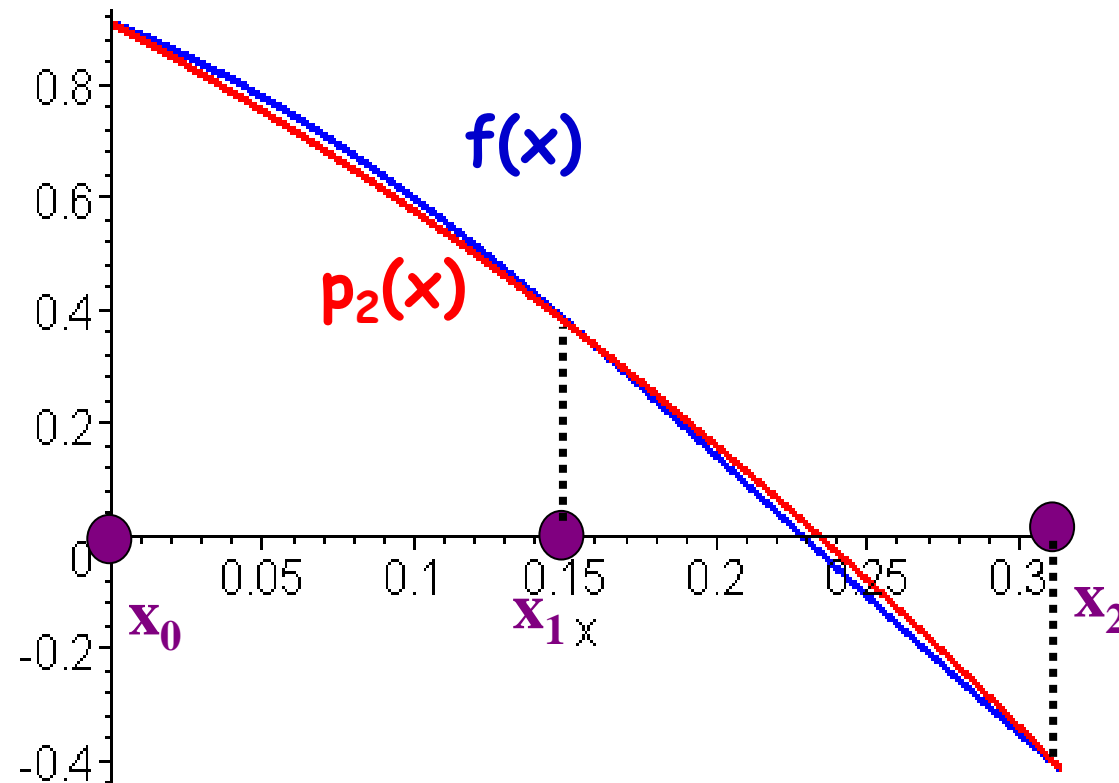
$$\begin{aligned} p_2(x) &= f(x_0) \cdot L_0(x) + f(x_1) \cdot L_1(x) + f(x_2) \cdot L_2(x) = \\ &= \text{sen}(5 \cdot (0) + 2) \cdot \left(\frac{200}{\pi^2} \cdot x^2 - \frac{30}{\pi} \cdot x + 1 \right) + \\ &+ \text{sen}\left(\frac{5\pi}{20} + 2\right) \cdot \left(\frac{-400}{\pi^2} \cdot x^2 + \frac{40}{\pi} \cdot x \right) \\ &+ \text{sen}\left(\frac{5\pi}{10} + 2\right) \cdot \left(\frac{200}{\pi^2} \cdot x^2 - \frac{10}{\pi} \cdot x \right) \end{aligned}$$

Operando:

$$p_2(x) \simeq -4.12937x^2 - 2.91850x + 0.90930$$

Ejemplo 2° (6/11)

Representación gráfica de la función y de su polinomio interpolador





Ejemplo 2º (7/11)

Solución del apartado c): Expresión del error

Aplicamos la expresión general del error de interpolación:

$$\varepsilon(x) = f(x) - p(x) = \frac{f'''(c_x)}{3!} \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

donde aparece la derivada **tercera** de $f(x)$ por tener el soporte de interpolación **3 puntos**.

$$f(x) = \text{sen}(5x + 2)$$

$$f'(x) = 5 \cdot \text{cos}(5x + 2)$$

$$f''(x) = -25 \cdot \text{sen}(5x + 2)$$

$$f'''(x) = -125 \cdot \text{cos}(5x + 2)$$



Ejemplo 2° (8/11)

La expresión del error será, entonces:

$$\varepsilon(x) = f(x) - p(x) = \frac{-125 \cdot \cos(5c_x + 2)}{3!} x \left(x - \frac{\pi}{10} \right) \left(x - \frac{\pi}{20} \right)$$

donde c_x es algún punto del intervalo $(0, \pi/10)$ dependiente de la abscisa "x"

Operando, resulta:

$$\varepsilon(x) = f(x) - p(x) = \frac{-125 \cdot \cos(5c_x + 2)}{6} \left(x^3 - \frac{3\pi}{20} x^2 + \frac{\pi^2}{200} x \right)$$

Ejemplo 2° (9/11)

Solución del apartado d): Cota de error

$$|\varepsilon(x)| = |f(x) - p(x)| \leq \frac{\max_{x \in [0, \frac{\pi}{10}]} |f'''(x)|}{3!} \max_{x \in [0, \frac{\pi}{10}]} \left| x^3 - \frac{3 \cdot \pi}{20} x^2 + \frac{\pi^2}{200} x \right| =$$

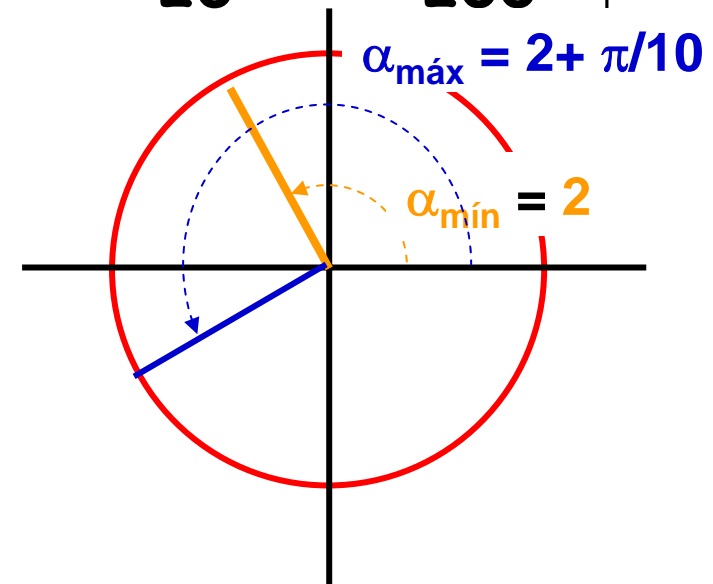
$$= \frac{125}{6} \max_{x \in [0, \frac{\pi}{10}]} |\cos(5 \cdot x + 2)| \cdot \max_{x \in [0, \frac{\pi}{10}]} \left| x^3 - \frac{3 \cdot \pi}{20} x^2 + \frac{\pi^2}{200} x \right|$$

$$x = 0 \longrightarrow \alpha_{\min} = 5 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$x = \pi/10 \longrightarrow \alpha_{\max} = 5 \cdot (\pi/10) + 2 = 2 + \pi/2$$

Luego:

$$\max_{x \in [0, \frac{\pi}{10}]} |\cos(5 \cdot x + 2)| = 1$$



Ejemplo 2° (10/11)

$$\begin{aligned} |\varepsilon'(\mathbf{x})| &\leq \frac{125}{6} \cdot \max_{x \in [0, \frac{\pi}{10}]} |\cos(5 \cdot x + 2)| \cdot \max_{x \in [0, \frac{\pi}{10}]} \left| x^3 - \frac{3 \cdot \pi}{20} \cdot x^2 + \frac{\pi^2}{200} \cdot x \right| = \\ &= \frac{125}{6} \cdot \max_{x \in [0, \frac{\pi}{10}]} \left| x^3 - \frac{3 \cdot \pi}{20} \cdot x^2 + \frac{\pi^2}{200} \cdot x \right| = \frac{125}{6} \cdot 0.001492 \end{aligned}$$

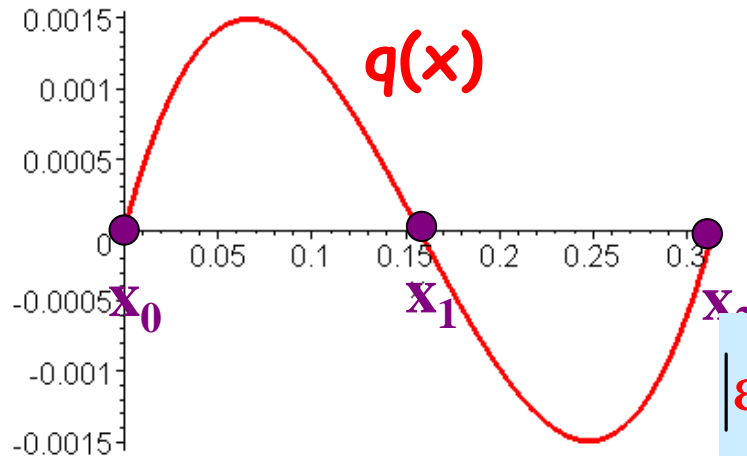
$$q(\mathbf{x}) = x^3 - \frac{3 \cdot \pi}{20} \cdot x^2 + \frac{\pi^2}{200} \cdot x \longrightarrow q'(\mathbf{x}) = 3 \cdot x^2 - \frac{3 \cdot \pi}{10} \cdot x + \frac{\pi^2}{200}$$

$$q'(\mathbf{x}^*) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}^* = \frac{\pi}{20} \cdot \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \longrightarrow \mathbf{x}^* \approx \begin{cases} 0.066385 \\ 0.247769 \end{cases}$$

$$q(0.066385) = -0.001492 \quad q(0.247769) = 0.001492$$

$$q(0.) = q(\pi/20) = q(\pi/10) = 0$$

Ejemplo 2° (11/11)



$$\max_{x \in [0, \pi/10]} |q(x)| = 0.001492$$

En resumen UNA cota de error es:

$$|\varepsilon(x)| \leq \frac{125}{6} \cdot 0.001492 \approx 0.031084$$

La función valor absoluto del error de interpolación $|\varepsilon(x)| = |f(x) - p(x)|$, tiene el siguiente grafo:

